

Matematika tálim baǵdarı 1-kurs studentleri ushın “*Matematikalıq analiz*” páninen
jumaqlawshı qadaǵalaw sorawları
(2024-2025 o.j. 1-semestr)

Теоритические вопросы

1. Понятие числовой функций.
2. Ограниченные числовые множества.
3. Основные элементарные функций и их непрерывность
4. Числовые последовательности
5. Непрерывность функций.
6. Свойства непрерывных функций на отрезке.
7. Предел монотонных последовательностей
8. Непрерывность сложной функций.
9. Свойства непрерывности множество действительных чисел
10. Понятие производной функций.
11. Непрерывность множество действительных чисел
12. Дифференцирование параметрически заданных и неявных функций.
13. Дифференциал функции.
14. Подпоследовательности, частичные пределы последовательностей
15. Правила нахождения производной функций
16. Односторонние пределы функций
17. Основные свойства функций, имеющих предел в точке
18. Верхние и нижние грани (Определение. Теорема единственности)
19. Критерий Коши (Теорема о существования конечного предела функции)
20. Система вложенных отрезков (Определение. Основные теоремы)
21. Счетные и несчетные множества (Определение. Теорема Кантора)
22. Производная функции (Её механический, физический и геометрический смысл)
23. Пределы монотонных функций (Определение. Теорема о существовании предела возрастающей функции)
24. Основные теоремы о дифференцируемых функциях (Теоремы о среднем значении)
25. Критерий Коши (Теорема о существования конечного предела функции)
26. Основные теоремы о дифференцируемых функциях (Теоремы о среднем значении)
27. Обратная функция (Производная обратной функции. Вычисление производной обратной функции)
28. Тригонометрические и обратно тригонометрические функции
(Некоторые замечательные пределы: при
$$x \rightarrow 0: \frac{\sin x}{x}, \frac{\operatorname{tg} x}{x}, \frac{\arcsin x}{x}, \frac{\operatorname{arctg} x}{x}, (1+x)^{\frac{1}{x}})$$

29. Правило Лопиталья (Раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$)
30. Предел последовательности. (Определение. Сформулировать общее определение в терминах окрестностей)
31. Непрерывность множества действительных чисел
32. Правила нахождения производной функции
33. Подпоследовательности, частичные пределы последовательностей
34. Непрерывность множества действительных чисел
35. Правила Лопиталья

Примеры

1.
$$\begin{cases} x = \sqrt{t} - 1 \\ y = \frac{1}{\sqrt{t}} \end{cases} \quad (y''(x) = ?)$$
2. $y = \frac{1+x}{x^2-5x+6}$ найдите область определения функции.
3. Найти предел: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^n + 3b^n}{5a^n + 7b^n}$
4. $f(x) = \arcsin x + \sqrt{\frac{2}{nx-1}}$ найдите область определения.
5. Вычислить предел: $x_n = n(\sqrt[3]{5+8n^3} - 2n), \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = ?$
6. Найти область определения функции
7. Вычислить предел

$$x_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n (-1)^n + \sin \frac{\pi n}{2}, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = ?, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = ?$$
8. Вычислить производную функции $y = \frac{4x+7}{2x+3}, y^{(n)}(x) = ?$
9. Найти область определения функций

$$f(x) = \arcsin x + \sqrt{\frac{2}{nx-1}}, \quad n \in \mathbb{N}$$
10. Вычислить предел.

$$x_n = n(\sqrt[3]{5+8n^3} - 2n), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = ?$$
11. Вычислить производную функции

$$y = x^{\arcsin x}$$
12. Исследовать на четность и на нечетность функции

$$f(x) = \sin^4 x + x^3 + 3 \sin x \cos x$$
13. Вычислите предел.

$$\lim_{x \rightarrow 8} \left(\frac{2x-7}{x+1} \right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}-2}}$$

$$y = \frac{4 + 3x^3}{x \cdot \sqrt[3]{(2 + x^3)^2}}$$

14. Найти производную функции

15. Найдите область определения функции $f(x) = \frac{1}{x^2 - 5 \sin x} + \sqrt{x^2 + 4}$.

16. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1} (n, m \in \mathbb{R})$

17. Найдите точки разрыва $y = \frac{1}{x - 5}$

18. Найдите область определения функции $f(x) = e^{\frac{1}{x}} + \arccos x$

19. Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - 1}{\operatorname{tg} \pi x}$$

20. $f(x) = \frac{2(1-x^2) + |1-x^2|}{3(1-x^2) - |1-x^2|}$, $x_0 = 1$, $f(x_0 + 0) - ?$, $f(x_0 - 0) - ?$

21. Найдите область определения функции $f(x) = \sqrt{3-x} + \sin \frac{2}{x}$

22. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 2\pi} (\cos x)^{1/\sin^2 2x}$

23. Если $f(x) = 2x \cdot 3^x$, найдите $f''(0)$.

24. По формуле Тейлора вокруг точки $x_0 = \frac{1}{2}$ до члена $o((x - x_0)^2)$ разложите функцию $f(x) = \ln(2x + 1)$

25. $y = 3 \sqrt[3]{\frac{x+1}{(x-1)^2}}$, $y' = ?$

26. Если $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \cos^2 \frac{11}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$, то найдите $f'(0)$

27. Разложите функцию $f(x) = e^{\operatorname{tg} x}$ по формуле Маклорена до члена $o(x^2)$

28. $y = \sin x$ исследовать на непрерывность

29. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin 2x}{(\pi - 4x)^2}$ (Правило Лопиталя не использовать!).

30. Проверьте функцию $f(x) = xe^{-x}$ на экстремумы.

31. $y = \lg(2x + 7)$, $y^{(n)}(x) = ?$

32. Вычислите предел

$$\lim_{x \rightarrow 1} [(x-1)^{-1} - \ln^{-1} x]$$

33. Найдите на графике функции $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x}$ интервалы выпуклости и вогнутости.

34. Найдите на графике функции $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ интервалы выпуклости и вогнутости.

35. Вычислите предел. $x_n = n + \sqrt[3]{4-n^2}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = ?$

36. Разложите функцию $f(x) = \sin(2x+3)$ по формуле Маклорена до члена $O(x^n)$

37. В каких точках и под каким углом пересекаются графики функции $f_1(x) = \frac{1}{x}$ и $f_2(x) = \sqrt{x}$

38. Вычислите предел. $x_n = \frac{\sqrt[3]{n+5} - \sqrt{3n^4+2}}{1+3+5+\dots+(2n-1)}$

39. Найти производную функции $y = \ln(\ln^2(\ln^3 x))$

40. В каких точках и под каким углом пересекаются графики функции $f_1(x) = \ln x$ и $f_2(x) = \frac{x^2}{2e}$?

41. Вычислите предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{1+\frac{4}{x}} - \sqrt[4]{1+\frac{3}{x}}}{1 - \sqrt[5]{1-\frac{5}{x}}}$

42. Найдите производную функции

$$f(x) = x^{x^a} + x^{ax} + a^{x^x} \quad (a > 0, x > 0)$$

43. Найдите область определения функции $f(x) = e^{\frac{1}{x}} + \arccos x$

44. Вычислите предел $x_n = 1 + \frac{n}{n+1} \cdot \cos^2 \frac{n\pi}{2}$, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = ?$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = ?$

45. Найдите производную сложной функции $y = e^x + e^{e^x} + e^{ee^x}$

46. Вычислите предел. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x - 1}$, $n \in \mathbb{N}$

47. В каких точках и под каким углом пересекаются графики функции $f_1(x) = \sqrt{2} \sin x$ и $f_2(x) = \sqrt{2} \cos x$

48. Если $y = \sin^2 x \cdot \sin 2x$, найдите $y^{(n)}(x) = ?$

49. Найдите y'' , если $y = \ln f(x)$

50. Вычислите предел. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3)^{100}}{(2n-1)^{98}(n+1)^2}$.

51. Найдите: $d(\sin x - x \cos x)$.

52. Вычислите предел. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x$.

53. Найдите: $d(3 \sin x - 4x \cos x)$.

54. Найдите: $f'(0)$, если $f(x) = x(x-1)(x-2)\dots(x-100)$.

55. В каких точках и под каким углом пересекаются графики функции

$$f_1(x) = \frac{1}{x} \text{ и } f_2(x) = \sqrt{x}$$

56. Вычислите предел. $x_n = \frac{\sqrt[3]{n+5} - \sqrt{3n^4+2}}{1+3+5+\dots+(2n-1)}$

57. Найдите производную функции $y = \ln(\ln^2(\ln x))$

58. В каких точках и под каким углом пересекаются графики функции

$$f_1(x) = \ln x \text{ и } f_2(x) = \frac{x^2}{2e}$$

59. Вычислите предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{1+\frac{4}{x}} - \sqrt[4]{1+\frac{3}{x}}}{1 - \sqrt[5]{1-\frac{7}{x}}}$

60. Найдите область определения функции $f(x) = e^{\frac{1}{x}} + \arccos x$

61. Вычислить предел $x_n = 1 + \frac{n}{n+1} \cdot \cos^2 \frac{n\pi}{2}$, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = ?$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = ?$

62. Найдите производную сложной функции $y = e^x + e^{e^x} + e^{ee^x}$

63. Исследовать на четность и на нечетность функции

$$f(x) = \sin^4 x + x^3 + 3 \sin x \cos x$$

64. Найдите область определения функции: $y = \log_2 \log_3 \sqrt{1+x}$

65. Найти предел

66. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x + 3}{2x^2 + x - 1}$

67. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$

68. Вычислит предел

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$$

69. Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 + 2x - 15}$$

70. Вычислит предел

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 1}{x^2 - 2x + 4}$$

71. Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x - 1}{3x^2 + 2x - 3}$$

72. Вычислит предел

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 + 15x + 25}{5 - 4x - x^2}$$

73. Вычислить предел

$$74. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 - x - x^2}{3x^2 - 8x - 3}$$

75. Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x - 1}{5x + 4} \right)$$

76. Вычислит предел

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$$

77. Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 7x + 17}{x^2 + 2x - 15}$$

78. $y = \frac{1+x}{x^2-5x+6}$ найти область определения функции

79. Вычислить предел.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^2 - 36}{x - 3}$$

80. Вычислите предел.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x - 1}{3x^2 + 2x - 3}$$

81. Вычислите предел.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 + 15x + 27}{5 - 4x - x^2}$$

82. Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{76 - x - x^2}{3x^2 - 8x - 3}$$

83. Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x-1}{5x+4} \right)$$

84. Найти предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x + 3}{2x^2 + x - 1}$$

85. Вычислит предел

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 3x + 2}$$

86. Вычислит предел $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$

87. Докажите предел последовательности по определению: $x_n = \frac{1-3n^2}{n^2+2}$ $a = -3$

88. Докажите предел последовательности по определению: $x_n = \frac{4n^2+1}{3n^2+2}$ $a = \frac{4}{3}$

89. Докажите предел последовательности по определению: $x_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$ $a = 1$

90. Докажите предел последовательности по определению: $x_n = \frac{2^n}{n!}$ $a = 0$

91. Докажите предел последовательности по определению: $x_n = \frac{1}{\sqrt[3]{3n-11}}$ $a = 0$

92. Докажите предел последовательности по определению: $x_n = \frac{2}{\sqrt{2n-1}}$ $a = 0$

93. Докажите предел последовательности по определению: $x_n = -\frac{6n}{n+2}$ $a = -6$

94. Докажите предел последовательности по определению: $x_n = \frac{2n^2 + 3n + 4}{4n^2 - 5n + 6}$

$$a = \frac{1}{2}$$

95. Докажите предел последовательности по определению: $x_n = \frac{1}{n} \sin \frac{\pi n}{2}$ $a = 0$

96. Докажите предел функции по определению: $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x + 3} = -7$

97. Докажите предел последовательности по определению:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{7x^2 + 8x + 1}{x + 1} = -6$$

98. Докажите предел последовательности по определению: $\lim_{x \rightarrow 3} x^4 = 81$

99. $y = \frac{x}{x^2 - 4x - 12}$, $y^{(n)}(x) = ?$

100. $y = \frac{1}{\sqrt{1-2x}}$, $y^{(n)}(x) = ?$

101. $f(x) = \sin ax \cdot \sin bx$, $f^{(n)}(x) = ?$

102. $y = x^2 \cdot \sin 2x$; $y^{(50)} = ?$

103. $y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$; $y^{(100)} = ?$

104. Найдите экстремум: $y = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x$

105. Найдите экстремум: $y = x \cdot \ln^2 x$

106. Найдите экстремум: $y = \frac{e^x}{x}$

107. Найдите экстремум: $y = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}$

108. Найдите экстремум: $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 1}$
109. Найдите экстремум: $y = x - \ln(1 + x)$
110. Исследовать функции на выпуклость: $y = (1 + x^2)e^x$
111. Исследовать функции на выпуклость: $y = 1 - |x^2 - 2|$
112. Исследовать функции на выпуклость: $y = 4 \cdot \sqrt{(x-1)^5} + 20\sqrt{(x-1)^3}$
113. Исследовать функции на выпуклость: $y = \frac{|x-1|}{x \cdot \sqrt{x}}$
114. Исследовать функции на выпуклость: $y = \ln(1 + x^3)$
115. Исследовать функции на выпуклость: $y = x + \sin x$
116. Исследовать функции на выпуклость: $y = \frac{\sqrt{x}}{1 + x}$
117. Найдите предел: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$
118. Найдите предел: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 + 3^x)^{\frac{1}{x}}$
119. Найдите предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\pi} \cdot \arccos x \right)^{\frac{1}{x}}$
120. Найдите предел: $\lim_{x \rightarrow 0} (ctg x)^{\frac{1}{\ln x}}$
121. Найдите предел: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-ax}}{e^{-x}(2 - \sin x - \cos x)} \quad (a \neq 1)$
122. Найдите предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \cdot \sin \frac{1}{x}}{\sin^2 x}$
123. Найдите предел: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$
124. Найдите предел: $\lim_{x \rightarrow a} \left(2 - \frac{x}{a} \right)^{tg \frac{\pi x}{2a}}$
125. Найдите предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin(\sin x) - \sin^2 x}{x^6}$

